ESCOLA DE VERÃO DE ASTRONOMIA

Colectânea de Exercícios

Uma colecção de Execícios como Introdução à Astronomia, Astrofísica e Gravitação

Compilado por

Diogo Ribeiro

Secção de Astronomia do Núcleo de Física do Instituto Superior Técnico

Formulário

Terra	
Massa (M_T)	5.98×10^{24} kg
Raio (R_T)	6.38×10^{6} m
Aceleração Gravítica (g)	$9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Inclinação da Elíptica	23.7°
Duração do Ano Tropical	365.242 dias solares médios
Duração do Ano Sideral	365.254 dias solares médios
Albedo	0.39
Distância média da Terra ao Sol	1.49×10^{11} m
Lua	
Massa (M_L)	7.35×10^{22} kg
Raio (R_L)	1.74×10^{6} m
Distância média entre a Terra e a Lua	3.84×10^{8} m
Inclinação orbital com a Elíptica	5.14°
Albedo	0.14
Magnitude Aparente	−12.74
Sol	
Massa (M_{Sol})	1.99×10^{30} kg
Raio (R_{Sol})	6.96×10^{8} m
Luminosidade (L_{Sol})	3.83×10^{26} W
Magnitude Absoluta	4.83
Temperatura da Superfície	5772 K
Diâmetro Angular da Terra	$30'$
Velocidade Angular na Galáxia	$220\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Distância do Centro da Galáxia	8.5 kpc
Constantes Físicas	
1 au	1.5×10^{11} m
1 pc	206 265 UA
Constante Gravitacional (G)	$6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Constante de Planck (h)	$6.62 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Constante de Boltzmann (k_B)	$1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Constante de Hubble (H_0)	$67.8\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$
Velocidade da luz no vácuo (c)	$299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Dia 1
Gravitação

Exercícios

1.1 Um cometa orbita o sol numa órbita cujos pontos mais afastado (afélio) e mais próximo (periélio) se encontram a 31.5 UA e a 0.5 UA do centro do sol respectivamente. Qual é o periodo orbital?

1.2 O Principezinho está num planeta com diâmetro de 20 km e densidade média de $5.4\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. No planeta existe um comboio que realiza uma viagem equatorial em torno do planeta. Será que o princepezinho consegue dar uma volta ao planeta em menos de 2 horas?

1.3 Calcula a força gravítica entre a Terra e a Lua e entre a Terra e o Sol. Qual o rácio entre as duas?

1.4 Qual a resultante da força gravitacional da Terra e do Sol na Lua quando esta está em (a) Lua Nova e (b) Lua Cheia. Verifica que a força é sempre dirigida para o Sol.

1.5 A que altura da superfície da Terra teríamos de estar para verificar um decréscimo de 1% na aceleração da gravidade? e a que profundidade teríamos de ir para observar um aumento pela mesma razão?

1.6 Três corpos de massa m são colocados nos vértices de um triângulo equilátero de lado a. Prova que as partículas podem descrever uma órbita circular cujo centro é o centro do triângulo. Prova que a velocidade angular do movimento é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{3MG}{a^3}}$$

1.7 Sabendo que o tamanho aparente do sol no céu é de 0.5° e que o ano tem a duração de 365.25 dias , calcula a densidade média do sol.

1.8 Um satélite Geoestacionário permanece sempre por cima de um mesmo local na Terra enquanto esta roda. Calcula o raio da órbita de um destes satélites. Se em portugal quisermos utilizar um destes aparelhos, a que ângulo temos de apontar as nossas antenas em relação ao zénite?

Dia 2
Astrofísica

Exercícios

2.1 Um aluno da EVA decidiu que queria entender melhor os conceitos aprendidos no segundo dia. Para tal, num dia de chuva, saiu de casa com um Balde com uma abertura de $300\,\mathrm{cm}^2$ e colocou-o a céu aberto.

(a) O que representa o Fluxo neste caso?

(b) Se o Fluxo aumentar, o que acontece à velocidade com que o balde se enche?

(c) O que representa o Fluxo Observado?

(d) Se o balde for duas vezes maior, o que acontece ao valor do Fluxo? E do Fluxo Observado?

O aluno conseguiu encontrar algum esclarecimento, mas ao fim do dia, ao olhar para os candeeiros da rua, voltou a pensar no assunto. Imaginou as lampadas a emitirem radiação (fotões) em todas as direcções e repensou os conceitos interiorizados.

(e) O que representa o Fluxo neste caso? Qual o equivalente do balde neste caso?

(f) O Fluxo depende da distância a que se observa a lâmpada?

(g) O que representa o Fluxo Observado?

(h) E o Fluxo Total?

(i) Escreve uma expressão para o Fluxo Total em função do Fluxo.

2.2 A Constante Solar (o fluxo da radiação solar à distância da terra) é de $1370\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

(e) Calcula o fluxo à superfície do sol sabendo que o seu tamanho angular é de meio grau.

(f) Quantos metros quadrados de superfície solar são necessários para produzir 1000 megawatts

2.3 Com base na temperatura média da superfície solar, do seu raio, da distância à terra e do raio desta e assumindo que a terra absorve toda a radiação nela incidente, calcula a temperatura média da terra.

2.4 Duas estrelas têm uma diferença de magnitude $(m_2 - m_1) = 5$. Qual o rácio entre os seus Fluxos?

2.5 Considera um sistema binário em que as magnitudes de cada estrela são 1.0 e 2.0. Qual a magnitude total do sistema? **nota:** não é 3!

2.6 Uma estrela encontra-se a uma distância de 100 pc e tem uma magnitude aparente $m = 6$. Qual é a sua magnitude absoluta?

2.7 A magnitude absoluta de uma estrela na galáxia de Andrómeda (distância 690 kpc) é de $M = 5$. A extrela explode como uma supernova ficando mil milhões de vezes mais brilhante (10^9). Qual é a sua magnitude aparente após a explosão?

2.8 A que comprimento de onda radia uma estrela com uma temperatura superfícial de 4000 K?

2.9 Sabendo que o sol tem um máximo de emissão na região do verde (500 nm) calcula a temperatura efectiva da fotosfera.

2.10 A diferença de magnitudes entre duas estrelas (1 e 2) da sequência principal de um enxame é de 2 magnitudes. As suas temperaturas efectivas são 6000 K e 5000 K respectivamente. Estima o rácio entre os raios das duas estrelas.

Dia 3
Telescópios e Coordenadas

Exercícios

3.1 Duas pessoas no equador terrestre separadas por 180° de longitude, observam a lua ao mesmo tempo tendo esta declinação nula.

(a) Desenha a situação

(b) Calcula a diferença em ascensão recta da lua vista pelas duas pessoas

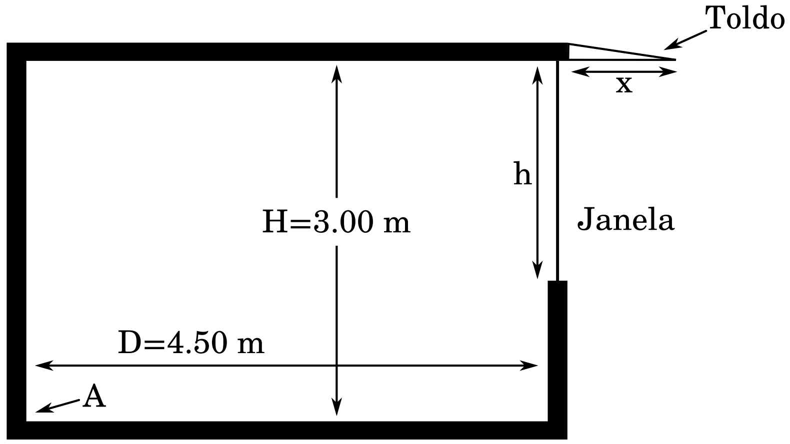
(c) A situação descrita não é exactamente possível como perceberás do teu desenho. Qual a diferença em longitude máxima a que os observadores podem estar para que observem pelo menos metade da lua ao mesmo tempo? Despreza os efeitos refractivos da atmosfera terrestre

3.2 A montanha de Damavand situa-se no norte do Irão a uma latitude de $35°57'$ N e a uma longitude de $52°6'$ E tendo 5.6×10^3 m de altura. Imagina um astrónomo no topo desta montanha. Qual a declinação mínima de uma estrela para que esta seja circumpolar?

3.3 Na figura abaixo encontra-se esquematizada uma casa que possui uma janela virada a sul com um toldo. Utilizando os valores indicados na figura, calcula o máximo comprimento do toldo (x) e a altura máxima da janela (h) para que:

(a) Nenhuma luz entra na casa ao meio dia do solstício de verão.

(b) A luz do sol bate no canto mais afastado da sala ao meio dia do solstício de inverno.



3.4 Uma estrela cruza o meridiano local sul a 85° e o meridiano norte a 45°. Determina a declinação da estrela e a latitude do observador.

3.5 Existem atualmente várias medidas de tempo, entre elas, tempo sideral e tempo solar. A primeira baseia-se no dia sideral, que é o intervalo de tempo entre duas culminações do ponto vernal, isto é, uma rotação inteira da Terra em relação às estrelas. A segunda corresponde ao dia solar, uma rotação inteira da Terra em relação ao sol, que será o intervalo de tempo entre duas culminações do sol.

(a) Calcula a duração do dia sideral na Terra, sabendo que a atual duração do dia solar é 24 horas e que um ano solar tem 365.25 dias solares.

(b) Qual seria a duração do dia solar e dia sideral na Terra, se esta orbita-se no sentido contrário em torno do seu eixo, mas com a mesma velocidade orbital , e no mesmo sentido em relação ao Sol?

3.6 Assumindo que a Phobos se move à volta de Marte numa órbita perfeitamente circular com raio de 9.38×10^6 m sobre o plano equatorial do planeta, calcula quanto tempo Phobospermanece acima do horizonte para um observador num ponto do equador Marte. Utiliza para os seguintes valores:

Periodo de Rotação de marte:	24.623 horas
Raio de Marte:	3393 km

Nota: Se estiveres com dificuldade, segue os seguintes paços: 1- Calcula o período orbital de Phobos; 2- Encontra o movimento relativo de Phobos em relação à superfície, ou seja, o período sinódico; 3- Usando trigonometria, encontra o ângulo, logo o tempo, durante o qual phobos é visível

Soluções

Dia 1

1.1 Utilizando a lei de Kepler (em UA) e denotando por a_p e a_a o periélio e o afélio respectivamente temos:

$$T^2 = a^3 = \left(\frac{a_p + a_a}{2}\right)^3 \Rightarrow T = \left(\frac{a_p + a_a}{2}\right)^{3/2} = \left(\frac{31.5 + 0.5}{2}\right)^{3/2} \approx 89 \text{ anos}$$

1.2 Para que o princepezinho se mantenha no comboio, a aceleração sentida pelo mesmo terá de ser na direcção do centro do planeta.
A aceleração gravítica é dada por:

$$a_G = \frac{G\,M}{r^2} = \frac{G\,\rho\,V}{r^2} = \frac{G\,\rho}{r^2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4\pi}{3} G r \rho$$

Por outro lado, devido ao movimento circular em torno do planeta teremos uma aceleração centrífuga dada por:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Logo, a condição para que o princepezinho não "levante vôo" é:

$$a_c - a_g \leq 0 \Leftrightarrow \frac{v^2}{r} \leq \frac{4\pi}{3} G r \rho \Leftrightarrow v \leq r\sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3}}$$

A Velocidade máxima é dada pela igualdade e toma o valor:

$$v_{max} = (10\,000\,\mathrm{m}) \times \sqrt{\frac{4\pi}{3}(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}) \times (5400\,\mathrm{kg\,m^{-3}})} \approx 12.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Em quilómetros por hora, a velocidade méxima é de $44.2\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. O tempo que, a esta velocidade o princepezinho demoraria a dar uma volta ao planeta seria de:

$$t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times (10\,\mathrm{km})}{(44.2\,\mathrm{km/h})} \approx 1.42\,\mathrm{h}$$

Vemos então que o princepezinho poderá realizar a viagem!

1.3 A força gravítica exercida entre a Terra e a Lua e a Terra e o Sol é, em módulo, respetivamente:

$$F_{T-L} = \frac{GM_T M_L}{r_{T-L}^2} \qquad F_{T-S} = \frac{GM_T M_S}{r_{T-S}^2}$$

De onde obtemos o rácio:

$$\frac{F_{T-S}}{F_{T-L}} = \left(\frac{M_S}{M_T}\right)\left(\frac{r_{T-L}}{r_{T-S}}\right)^2 = \left(\frac{1.99 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}}{7.35 \times 10^{22}\ \mathrm{kg}}\right)\left(\frac{3.84 \times 10^{8}\ \mathrm{m}}{1.49 \times 10^{11}\ \mathrm{m}}\right)^2 \approx 179.8$$

Concluímos então que a força que o Sol exerce sobre a Terra é praticamente 180 vezes maior do que a que a Lua exerce.

1.4 Como foi observado no exercício anterior temos que a força entre a terra e o sol é 180 vezes maior que a força entre a terra e a Lua pelo que apontará sempre para o sol. Como tal temos que:

(a) Quando em lua nova:

$$|F_{Total}| = |F_{T-S} + F_{T-L}| \approx 181|F_{T-L}| = 181 \times \frac{GM_T M_L}{r_{T-L}^2} \tag{1}$$

Substituindo por valores temos que $F_{Total} \approx 181 \times (1.98 \times 10^{24}\,\mathrm{N}) = 3.60 \times 10^{26}\,\mathrm{N}$

(b) Quando em lua cheia as forças subtraiem-se e temos:

$$|F_{Total}| = |F_{T-S} - F_{T-L}| \approx 179|F_{T-L}| = 179 \times \frac{GM_T M_L}{r_{T-L}^2} \tag{2}$$

Como na última alínea chegamos à conclusão de que $F_{Total} \approx 3.56 \times 10^{26}\,\mathrm{N}$

1.5 A uma distância r do centro da terra temos a acelaração dada por:

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Para uma distância r' teremos a respectiva aceleração g' obtida por substituição de r por r' na expressão anterior. O rácio entre as duas é simplesmente dado por:

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

A diferença percentual em relação à aceleração usual é então dada por:

$$e_r = \frac{g'-g}{g} = \frac{g'}{g} - 1 = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 1 \quad \Longrightarrow \quad r' = \frac{r}{\sqrt{1+e_r}}$$

Para a alínea (a) temos $e_r = -0.01$ pelo que a altura a que vemos o decréscimo é:

$$h = r' - r = (6.38 \times 10^6\,\mathrm{m}) \times \left(\frac{1}{\sqrt{0.99}} - 1\right) \approx 32\,141\,\mathrm{m}$$

Para a alínea (b) temos $e_r = +0.01$ pelo que:

$$h = r' - r = (6.38 \times 10^6\,\mathrm{m}) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1.01}} - 1\right) \approx -31\,662\,\mathrm{m}$$

1.6 **Sem Solução**

1.7 Da igualdade da aceleração centrípeta com a gravítica temos que:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G\,M}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{G\,M}{r}$$

Sendo a órbita circular, a velocidade é simplesmente dada pelo rácio do comprimento da trajectória ao longo de um ano pelo periodo de uma revolução T. Por outro lado, a massa do sol M é simplesmente dada pelo produto do volume do sol (que se assume esférico) pela densidade média do mesmo. Isto é:

$$v = \left(\frac{2\pi r}{T}\right) \qquad e \qquad M = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho$$

Substituindo estas igualdades na primeira equação de todas obtemos:

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{G}{r}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

Utilizando agora o facto de que o tamanho angular do sol é θ temos que, desenhando um triângulo isósceles cuja altura é a distância da terra ao sol (raio da órbita) e cujos vértices da base se encontram nas extremidades do disco solar, temos a relação trigonométrica:

$$R = r\,\sin(\theta/2)$$

Substituindo assim esta igualdade na última expressão temos:

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{G}{r}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \sin^3(\theta/2)\right)$$

de onde retiramos por fim uma expressão para a densidade média do sol:

$$\rho = \frac{3\pi}{T^2\,G\,\sin^3(\theta/2)}$$

Substítuindo os valores dados temos:

$$\rho = \frac{3\pi}{(365\times 24\times 60\times 60\,\mathrm{s})^2\,(6.67\times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}})\,\sin^3(0.5/2)} \approx 1710\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$$

Sendo o valor real perto de $1410\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, vemos que este cálculo é uma aproximação razoável.

1.8 **Sem Solução**

Dia 2

2.1

(a) No caso do nosso problema, o fluxo representa o número de gotas que caiem por segundo e por unidade de área.

(b) O balde enche mais rápido pois temos mais água a entrar nele por segundo (maior fluxo)

(c) O fluxo observado é o número de gotas de água que por segundo passam na abertura do balde

(d) O Fluxo não se altera pois é uma grandeza que está associada apenas à chuva. Por outro lado, o fluxo observado vai aumentar pois depende das dimensões do balde.

(e) Neste caso, o Fluxo representa a energia (número de fotões) que passam por segundo por unidade de área. O balde, neste caso, é substituido pelos olhos de quem observa a lâmpada.

(f) Sim. Como os fotões (radiação) são emitidos radialmente, estes vão-se afastando uns dos outros pelo que, ao considerar a mesma área cada vez mais longe da fonte, menos e menos fotões passarão por ela (definição de fluxo)

(g) O fluxo observado representa o número de fotões que por segundo passam nas pupilas do observador.

(h) O fluxo total corresponde ao número total de fotões emitidos por unidade de segundo

(i) Sendo o Fluxo total o número total de fotões emitidos e o fluxo o número de fotões emitidos por unidade de área temos a expressão simples:

$$F_T = F \times A = F \times 4\pi r^2$$

Onde r é a distância a que o fluxo é medido. O Fluxo total é usualmente chamado de Luminosidade L e o fluxo, no caso da energia pode ser chamado de potência.

2.2 A Constante Solar (o fluxo da radiação solar à distância da terra) é de $1370\,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

(e) O Fluxo solar observado à distância de uma unidade astronómica é obtido da luminosidade do sol (constante) através de:

$$F = \frac{L_S}{4\pi R_{T-S}^2}$$

O Fluxo à suoerfície do sol F' é dado do mesmo modo por:

$$F' = \frac{L_S}{4\pi R_S^2}$$

O Rácio entre estas duas igualdades permite-nos escrever:

$$\frac{F}{F'} = \left(\frac{R_S}{R_{T-S}}\right)^2$$

Notando por fim que o rácio entre as duas distâncias é precisamente $\sin(\alpha/2)$ temos que:

$$F' = \frac{F}{\sin^2(\alpha/2)} = \frac{1370\,\mathrm{W\,m^{-2}}}{\sin^2(0.25°)} \approx 71\,959\,571\,\mathrm{W\,m^{-2}} \approx 72\,\mathrm{MW\,m^{-2}}$$

(f) Utilizando o resultado anterior temos que:

$$A = \frac{1000\,\mathrm{MW}}{72\,\mathrm{MW\,m^{-2}}} \approx 14.0\,\mathrm{m^2}$$

Obtemos então o valor de $14.0\,\mathrm{m^2}$. Para um campo de futebol com $100\,\mathrm{m}$ por $50\,\mathrm{m}$, temos uma área de $5000\,\mathrm{m^2}$ pelo que, uma porção do sol mais pequena que um campo de futebol produz uma quantidade de energia enorme.

2.3 Com base na temperatura média da superfície solar, do seu raio, da distância à terra e do raio desta e assumindo que a terra absorve toda a radiação nela incidente, calcula a temperatura média da terra.

Tomando o sol como um corpo negro à temperatura T temos que a potência total por ele radiada (luminosidade) é dada por

$$P = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Assim, o fluxo à distância de 1 UA será de:

$$F = \frac{P}{4\pi L^2} = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{4\pi L^2} = \sigma T_S^4 \left(\frac{R}{L}\right)^2$$

Como a terra absorve toda a radiação incidente, temos que a energia aborvida é igual ao produto deste fluxo pela área incidente (metade da superfície terrestre). Aproximando esta área por um círculo temos:

$$P_{abs} = F \times A = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{L}\right)^2 \pi R_T^2$$

A potência absorvida terá de ser igual à potência emitida (equilíbrio) e esta, assumindo também a terra como um corpo negro terá se ser igual a:

$$P_{emi} = F \times A = \sigma T_T^4 \times 4\pi R_T^2$$

Assim temos que

$$P_{emi} = P_{abs} \Rightarrow T_T^4 = \frac{T_S^4}{4}\left(\frac{R_S}{L}\right)^2 \Rightarrow T_T = T_S\sqrt{\frac{R_S}{2L}} \tag{3}$$

Substítuindo pelos valores das constantes obtemos uma temperatura média de cerca de 3 °C.

2.4 Utilizando a fórmula de Pogson, temos que:

$$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

De onde obtemos:

$$\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = 10^{-(m1-m2)/2.5} = 10^2 = 100$$

Ou seja, a estrela 1 é visualmente 100 vezes mais brilhante que a estrela 2

2.5 Como as magnitudes são grandezas logarítmicas, não podemos simplesmente somá-las. No entanto, podemos somar o Fluxo. Deste modo, usando a fórmula para a magnitude com a a referência de Fluxo F_0 temos:

$$m_1 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_0}\right) \qquad m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_2}{F_0}\right)$$

De onde temos:

$$F_1 = F_0 \times 10^{-m_1/2.5} \qquad F_2 = F_0 \times 10^{-m_2/2.5}$$

Somando agora os fluxos para obter o Fluxo total temos:

$$m_T = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_0 \times (10^{-m_1/2.5} + 10^{-m_2/2.5})}{F_0}\right)$$

Substituindo valores temos:

$$m_T = -2.5\log_{10}\left(10^{-0.4} + 10^{-0.8}\right) \approx 0.64$$

2.6 Usando a fórmula para a diferença entre a magnitude aparente e a magnitude absoluta temos:

$$m - M = 5\log_{10}\left(\frac{r}{10\,\mathrm{pc}}\right) \quad \Rightarrow \quad M = 6 - 5\log_{10}\left(\frac{100}{10}\right) = 1$$

2.7 Da fórmula da magnitude absoluta podemos encotntrar a magnitude aparente da estrela antes da explosão:

$$m_i = M + 5\log_{10}\left(\frac{r}{10\,\mathrm{pc}}\right) = 5 + 5\log_{10}\left(\frac{690\times 10^3\,\mathrm{pc}}{10\,\mathrm{pc}}\right) \approx 29.2$$

Utilizando agora a fórmula de Pogson podemos encontrar a variação de magnitudes entre a estrela antes e depois. Com m_i e m_f a representar, respectivamente, a magnitude antes e depois da explosão temos:

$$m_f - m_i = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_f}{F_i}\right) = -2.5\log_{10}\left(\frac{10^9\times F_i}{F_i}\right) \approx -22.5$$

Assim temos:

$$m_f = m_i - 22.5 = 29.2 - 22.5 = 6.7$$

Obtemos então a magnitude aparente da estrela depois da explosão, sendo esta de 6.7

2.8 Da lei do deslocameto de Wien temos:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = \frac{2.898\times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}}{4000\,\mathrm{K}} = 7.245\times 10^{-7}\,\mathrm{m} = 724.5\,\mathrm{nm}$$

2.9 Da lei do deslocameto de Wien novamente temos:

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}} = \frac{2.898\times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}}{5\times 10^{-7}\,\mathrm{m}} \approx 5800\,\mathrm{K}$$

2.10 A lei de stephen Boltzman indica-nos que a energia radiada por unidade de tempo e por unidade de área (fluxo de energia) por um corpo negro é dada por:

$$F = \sigma T^4$$

Como tal, ao sabermos a área A de uma estrela (esfera) podemos ter a energia total radiada por segundo (Luminosidade):

$$L = A\,F = A\,\sigma T^4 = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Utilizando agora o facto de as estrelas se encontrarem à mesma distância do observador temos que, utilizando a fórmula de Pogson, a diferença de magnitudes é dada por:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = -2.5\log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2}\frac{d_2}{d_1}\right) \approx -2.5\log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$$

Substituindo então a expressão para a luminosidade e definindo m_1 como sendo a estrela mais brilhante ($\Delta m = 2$) vem:

$$2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi R_2^2 \sigma T_2^4}\right) = -2.5\log_{10}\left(\frac{R_1^2\, T_1^4}{R_2^2\, T_2^4}\right) = -5\log_{10}\left(\frac{R_1\, T_1^2}{R_2\, T_2^2}\right)$$

De onde vem por fim:

$$\frac{R_1\, T_1^2}{R_2\, T_2^2} = 10^{0.4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 2.512\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

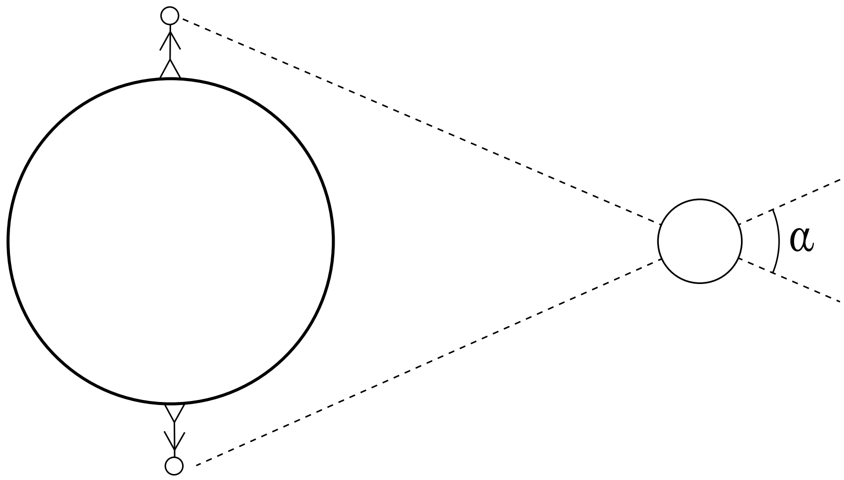
Assumindo por fim que a estrela mais brilhante é também a mais quente temos:

$$\frac{R_1}{R_2} = 2.512\left(\frac{5000\,\mathrm{K}}{6000\,\mathrm{K}}\right)^2 = 1.74$$

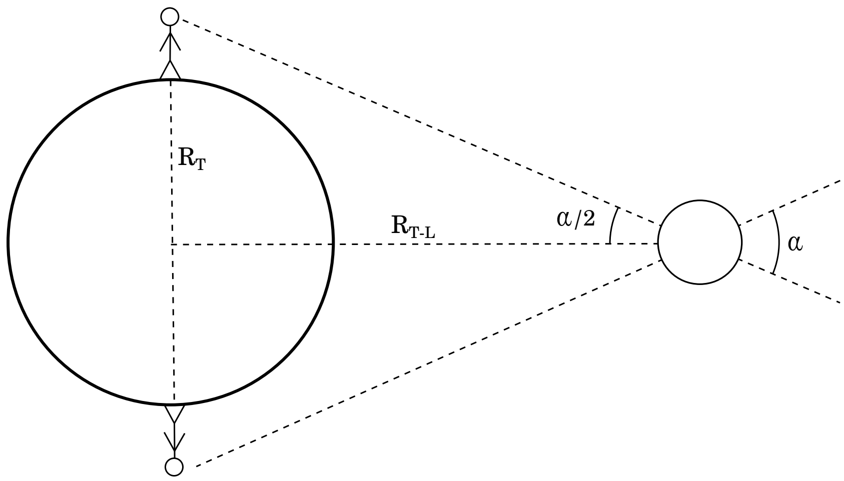
Dia 3

3.1

(a) A situação desenhada é:



(b) A diferença na ascensão recta pode ser calculada com o auxílio da figura da alínea anterior:



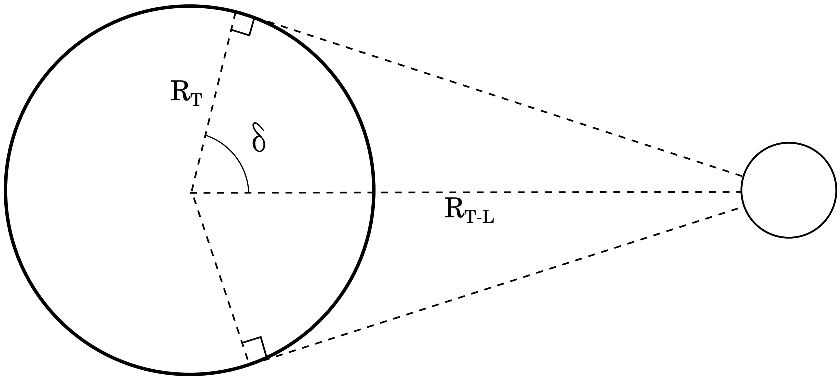
Como podemos ver, temos que:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R_T}{R_{T-L}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{R_T}{R_{T-L}}\right)$$

Substituindo os valore reais temos:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{6.38 \times 10^6\,\mathrm{m}}{3.84 \times 10^8\,\mathrm{m}}\right) = \arctan(0.0166) = 0.95°$$

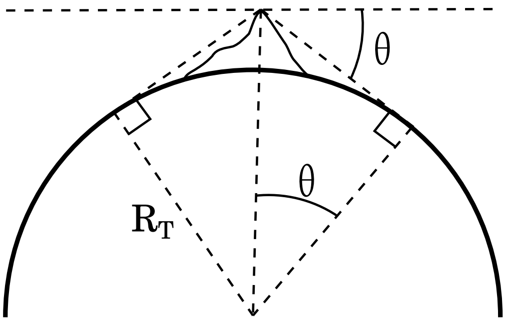
(c) Recorrendo novamente ao esquema abaixo temos que a situação mínima ocorre quando a linha que une o observador ao centro da lua é perpendicular ao raio da terra:



Assim, temos que δ é dado por:

$$\cos\delta = \frac{R_T}{R_{T-L}} \quad \Rightarrow \quad \delta = \arccos\left(\frac{6.38\times10^6\,\mathrm{m}}{3.84\times10^8\,\mathrm{m}}\right) = \cos^{-1}(0.0166) \approx 89°$$

3.2 Devido ao facto de o observador se encontrar mais alto, terá um campo de visão acrescido de 2θ como esquematizado na figura abaixo.

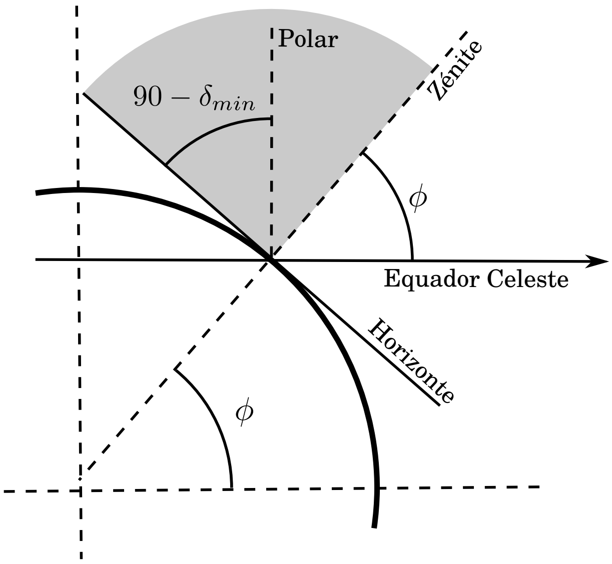


Analisan-do-a temos que:

$$\cos\theta = \frac{R_T}{R_T+h} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{6.38\times10^6\,\mathrm{m}}{6.38\times10^6\,\mathrm{m}+5.6\times10^3\,\mathrm{m}}\right) \approx 2.40° = 2°24'$$

Basta-nos agora determinar a latitude máxima e mínima observável por um observador a uma latitude ϕ e somar esta quantidade. Na figura abaixo vemos que, a declinação mínima normal é dada por $90-\phi$ e como tal, no caso da montanha temos:

$$\delta_{min} = 90° - \phi - \theta = 90° - 35°57'N - 2°24' = 51°5'N$$



3.3 No solstício de verão (condição (a)) temos de ter que o raio de luz que passa mesmo no fim do toldo embate no extremo inferior da janela. Por outro lado, no solstício de inverno (condição (b)) temos de ter que este mesmo raio bate no ponto A.

Deste modo, temos que, ao meio dia dos solstícios de inverno e verão, os respectivos ângulos zenitais do sol z_i e z_v são dados por:

$$z_v = \phi - 23.5°$$
$$z_i = \phi + 23.5°$$

Olhando agora para a figura temos, no solstício de verão que:

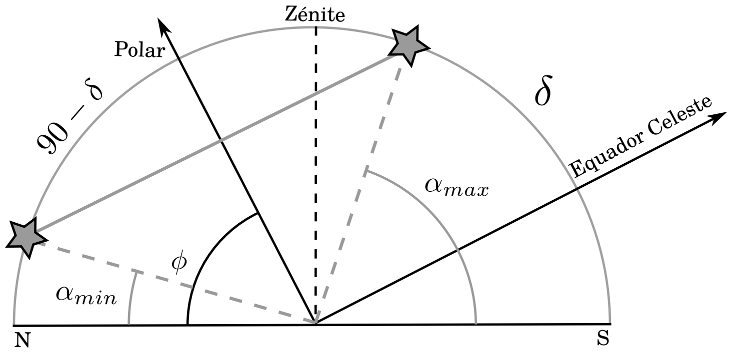
$$\tan(z_v) = \frac{x}{h} = \tan(12.5°) = 0.222$$

No solstício de inverno temos por outro lado:

$$\tan(z_i) = \frac{D+x}{H} = \tan(59.5°) = 1.70$$

Logo temos que:

$$x = 1.70H - D = 0.593\,\mathrm{m} \quad \text{e} \quad h = \frac{x}{0.222} = 2.67\,\mathrm{m}$$



3.4

Na figura abaixo encontra-se esquematizada a situação.
Temos então as duas equações:

$$\begin{cases} \delta = \alpha_{max} - (90 - \phi) \\ \alpha_{min} = \phi - (90 - \delta) \end{cases} = \begin{cases} \delta = \alpha_{max} - (90 - \phi) \\ \delta = \alpha_{min} + (90 - \phi) \end{cases}$$

Subtraindo e somando as duas equações temos:

$$\delta = \frac{\alpha_{max} + \alpha_{min}}{2} \qquad \phi = 90 - \frac{\alpha_{max} - \alpha_{min}}{2}$$

3.5

(a) Um dia solar é maior do que um dia sideral, pois como mostra a figura, a Terra tem de rodar mais um certo ângulo para o sol passar no meridiano de lugar (rotação e translação da terra no sentido antihorário). Podemos verificar que o ângulo extra para fazer um dia solar é igual ao ângulo Δ correspondente ao ângulo percorrido num dia sideral. Estas relações trigonométricas levam-nos à conclusão que um ano sideral tem a duração de 356.25 dias solares mais 1 dia solar (uma volta inteira em torno de si própria). Assim, com uma simples regra de três simples:

$$T_{sid} = T_{sol}\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

com $T_{sol} = 24h$ e $n = 365.25$, obtemos $T_{sid} = 23^h 56^{min} 4^s$.

(b) Nesta situação, vamos ter exatamente o contrário, ou seja, num ano solar a Terra vai completar uma rotação sobre si própria a menos, pelo que um dia solar vai ser mais curto do que um dia sideral. Porém, notar que a duração do dia sideral não se altera por comparação à alinea anterior, pois não depende da direção de rotação. Então:

$$T'_{sol} = T_{sid}\left(\frac{n}{n+1}\right) \Rightarrow T_{sol}\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Obtemos que $T'_{sol} = 23^h 52^{min} 8^s$.

3.6 Sem solução