ESCOLA DE VERÃO DE ASTRONOMIA

O Argumento da Maçã

Notas das aulas de introdução à Gravitação

Bruno Valeixo Bento

Secção de Astronomia do Núcleo de Física do Instituto Superior Técnico

"That gravity should be innate, inherent, and essential to matter, so that one body may act upon another at a distance, through a vacuum, without the mediation of anything else, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity, that I believe no man who has in philosophical matters a competent faculty of thinking, can ever fall into it."

- Isaac Newton

Introdução

A Gravidade é a mais antiga de todas as forças. Embora seja a mais fraca das quatro forças fundamentais, a Gravidade é a mais fácil de observar: todos nós sentimos a sua presença a partir do momento em que sentimos o chão. Contudo, não foi pelo facto de ser evidente que se revelou fácil de compreender. A eterna pergunta "porque é que as coisas caiem?" passou por inúmeras mentes brilhantes antes de chegar até nós e, mesmo hoje, a Gravidade continua a ser a mais misteriosa das quatro forças.

Apesar de ser tão antiga, pouco se soube sobre esta força fundamental até muito recentemente. Só em 1687, com a publicação de *"Philosophiae naturalis principia mathematica"*, de Sir Isaac Newton, começámos a compreender a verdadeira natureza desta força. Nesta publicação de 3 volumes, Newton apresentou as famosas leis de Newton, que descrevem a Mecânica Clássica, e a Lei da Gravitação Universal, que descreveu pela primeira vez o funcionamento da Gravidade e permitiu fazer previsões à escala planetária.

Segundo a lenda, Newton descansava à sombra de uma macieira quando uma maçã lhe caíu na cabeça. Terá sido neste momento que Newton começou a perceber as regras desta misteriosa força e terá sido este o início da Lei da Gravitação Universal. No entanto, parece que a maçã nunca lhe caíu na cabeça. Na sua biografia, este episódio é descrito de forma ligeiramente diferente: a maçã não lhe caíu na cabeça, mas à sua frente, de tal forma que Newton viu o movimento da maçã na sua totalidade. Independentemente da versão correcta, uma coisa é certa: Isaac Newton passou da queda de uma maçã num pomar para o movimento orbital da lua apenas com papel e caneta. Qual terá sido afinal o argumento da maçã que tão rapidamente convenceu Newton?

1 Mecânica Clássica

A forma como se introduz actualmente Mecânica Clássica não segue a formulação original de Newton. Nos seus *Principia Mathematica*, Newton utiliza argumentos geométricos para justificar as suas conclusões. Não são utilizadas noções de Cálculo Diferencial, que ele próprio desenvolveu para formular as suas leis, pelo que as demonstrações são extremamente mais complicadas do que as suas versões modernas.

Para chegar à Lei da Gravitação Universal da forma mais simples possível, vamos começar por introduzir alguns conceitos importantes que serão muito úteis nas secções que se seguem.

1.1 Preliminares

A Mecânica Clássica é descrita com recurso a vectores. A posição de um corpo, a sua velocidade e a força que lhe é aplicada são exemplos de grandezas vectoriais utilizadas para descrever o movimento dos corpos. Todos os argumentos e cálculos que faremos nestas notas assumem uma aproximação muito comum que é importante recordar. Caso não existam rotações ou deformações do corpo ou caso estas sejam desprezadas (i.e. quando o seu efeito é irrelevante quando comparado com o que estamos a estudar), podemos utilizar o **Modelo da Partícula Material**.

Modelo da Partícula Material: Um corpo pode ser representado pelo seu Centro de Massa (CM), sendo todas as forças aplicadas nesse mesmo ponto e a posição, velocidade e aceleração do corpo descritos em termos da posição, velocidade e aceleração do CM.

Se utilizarmos o Modelo da Partícula Material, podemos começar a tratar todos os corpos como se fossem simples pontos. Podemos descrever o movimento destes corpos (pontos) sabendo a sua posição a cada momento, i.e. através da posição, a que vamos chamar $\vec{r}$, em função do tempo t, $\vec{r}(t)$. Há uma razão muito simples para a posição $\vec{r}$ ser um vector: a posição é um conjunto de números. Neste caso, esses números são as coordenadas (x, y, z) (uma vez que vivemos num mundo a 3 dimensões[1]). Na verdade, um vector pode ser visto de duas formas: como um conjunto de números ou como

[1]Como veremos mais à frente, para descrever a força gravítica vamos apenas precisar de 2 coordenadas (x, y) ou (r, θ), uma vez que os movimentos estarão restritos a um plano.

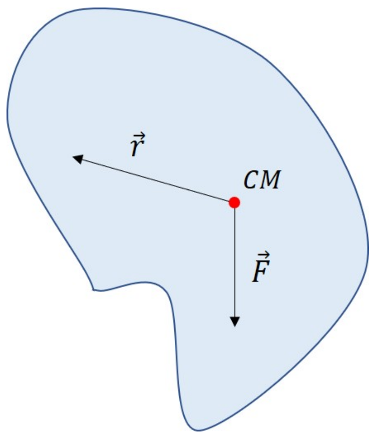

Figure 1: Centro de Massa de um corpo

uma seta no espaço. Na prática, vamos saltar constantemente de uma perspectiva para outra, conforme a necessidade. Enquanto "seta" no espaço, um vector pode ser definido da seguinte forma.

Vector: Um vector é um objecto geométrico descrito através de 4 características. (1) Ponto de aplicação, (2) Direcção, (3) Sentido e (4) Magnitude ou Comprimento.

No caso particular do vector posição, $\vec{r}$, o ponto de aplicação é a origem de um referencial. A direcção e o sentido determinam a posição do corpo relativamente à origem e a magnitude dá-nos o ponto exacto em que o corpo se encontra (i.e. a distância do corpo à origem). É importante lembrar que a descrição de um vector depende do referencial que utilizamos (do sistema de coordenadas). Imaginemos que, dado um referencial com coordenadas (x, y, z), um corpo se encontra no ponto (x_0, y_0, z_0) em $t = t_0$. Do ponto de vista geométrico, escrevemos:

$$\vec{r}(t_0) = x_0\ \vec{e}_x + y_0\ \vec{e}_y + z_0\ \vec{e}_z \quad (1)$$

Os vectores $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ são chamados versores e constituem a **unidade** de cada direcção[2]. Se imaginarmos um tabuleiro de xadrez, $\vec{e}_x$ significa *"para a direita"* e x_0 diz-nos o número de casas que devemos andar *para a direita*. Por sua vez, $\vec{e}_y$ significa *"para a frente"* e y_0 diz-nos o número de casas que devemos andar *para a frente*.[3] É importante perceber que a posição $\vec{r}$ pode

[2]Por exemplo, $\vec{e}_x$ corresponde ao vector de coordenadas $(1,0,0)$ em coordenadas (x, y, z).

[3]Para andar para a esquerda ou para trás, basta inverter os versores com um sinal de menos, $-\vec{e}_x$ ou $-\vec{e}_y$.

mudar se as coordenadas (x_0, y_0, z_0) mudarem *ou* se os versores $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ mudarem, i.e. se o sistema de coordenadas mudar de direcção. No exemplo do tabuleiro de xadrez, a posição do rei pode mudar se o mudarmos de casa no tabuleiro ou se rodarmos o próprio tabuleiro (agora andar para a frente podia ser andar para a esquerda e andar para a direita podia ser andar a frente). A magnitude do vector é calculada através das coordenadas (x_0, y_0, z_0).

$$|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \tag{2}$$

Sabendo a posição de um corpo em função do tempo, $\vec{r}(t)$, podemos perguntar qual é a sua velocidade num dado instante t_0. A primeira noção que temos de velocidade é a de *velocidade média*, que relaciona a distância percorrida com o tempo necessário para a percorrer.

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t_1) - r(t_0)}{t_1 - t_0} \tag{3}$$

Esta definição não nos dá uma velocidade em cada ponto, mas uma média num dado intervalo de tempo. Se quisermos saber a velocidade em cada ponto, precisamos de tomar o limite $t_1 \to t_0$, i.e. imaginar que o tempo que passou foi tão pequeno quanto possível e que o corpo se moveu o mínimo possível. A este *mínimo possível* vamos chamar **diferencial** e representar por dr e dt.

$$v = \frac{dr}{dt} \equiv \lim_{t_1 \to t_0} \frac{r(t_1) - r(t_0)}{t_1 - t_0} \tag{4}$$

Embora o termo dr/dt pareça uma fracção, em rigor não é. Em vez disso, a sua definição é dada pelo limite da Eq.(4). O que acabámos de introduzir é o conceito de **derivada**, que tem um papel fundamental em Física, uma vez que estamos sempre interessados em descrever a evolução de um corpo (ou de um sistema) em função de um dado parâmetro (não tem necessariamente de ser o tempo). A derivada contém na sua definição a noção de *"variação num dado ponto"* que procurávamos.

Uma vez que a posição é um vector, $\vec{r}$, a velocidade também é um vector, $\vec{v}$, pelo que a definição correcta será

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t) \tag{5}$$

De forma a simplificar as expressões vamos utilizar a notação introduzida na Eq.(5) em que o ponto representa a derivada em ordem ao tempo (variação em função do tempo). Se fixarmos o sistema de coordenadas, a definição reduz-se a cada uma das coordenadas de $\vec{r}$:

$$\vec{v}(t_0) = \dot{x}(t_0)\,\vec{e}_x + \dot{y}(t_0)\,\vec{e}_y + \dot{z}(t_0)\,\vec{e}_z \tag{6}$$

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \tag{7}$$

A Eq.(7) é consequência da Eq.(6) e significa que podemos pensar componente a componente. Daqui em diante vamos omitir o tempo t_0 embora estejamos sempre a pensar em cada uma destas grandezas num dado momento no tempo.

Finalmente, a aceleração de um corpo é a variação da sua velocidade em função do tempo. Utilizando novamente o conceito de derivada, definimos:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}(t) \tag{8}$$

Se o movimento do corpo for uniforme, i.e. tiver velocidade constante, a aceleração é nula, $\vec{a} = 0$. É importante notar que, como qualquer vector, a velocidade pode variar porque as suas componentes variam *ou* porque os versores variam, ou seja, pode mudar o módulo da velocidade ou a sua direcção. No caso da força gravítica, que como vamos ver é uma força central, esta subtileza vai ter um papel importante.

Uma vez que a aceleração, $\vec{a}$, é a derivada da velocidade, $\vec{v}$, em ordem ao tempo e que a velocidade é a derivada da posição, $\vec{r}$, em ordem ao tempo, a aceleração corresponde a **duas derivadas da posição em ordem ao tempo**.

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}(t) \tag{9}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z \tag{10}$$

Para terminar esta secção, vejamos o que acontece ao mudar de coordenadas. Vamos focar-nos no plano e passar de um sistema de **coordenadas cartesianas** (x,y) para um sistema de **coordenadas polares** (r,θ). Ao contrário do sistema (x,y), em que os versores $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$ mantêm sempre a mesma direcção, o sistema (r,θ) segue o corpo no seu movimento, pelo que as direcções de $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_\theta$ variam consoante o movimento do corpo (Figura 2). Isto significa que $\dot{\vec{e}}_x = \dot{\vec{e}}_y = 0$, mas $\dot{\vec{e}}_r$ e $\dot{\vec{e}}_\theta$ não são necessariamente zero.

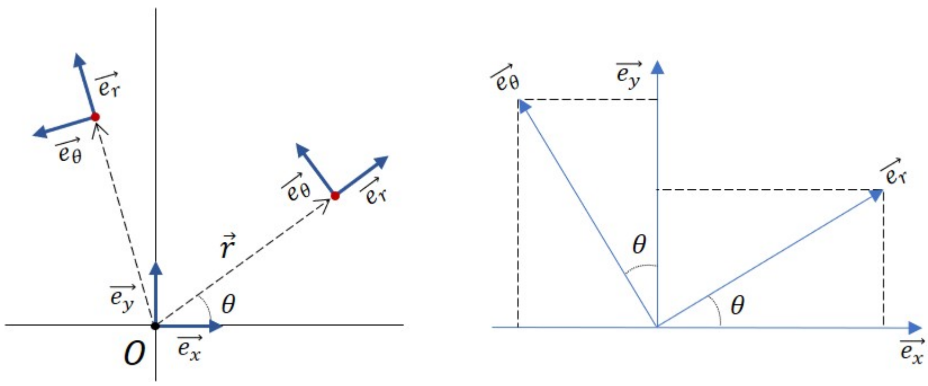

Figure 2: Mudança de coordenadas cartesianas (x, y) para coordenadas polares (r,θ).

Comecemos por efectuar a mudança de coordenadas, estabelecendo a relação entre as coordenadas (x, y) e as coordenadas (r,θ).

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{11}$$

A relação entre os versores $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ e os versores $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ é:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\ \vec{e}_x + \sin\theta\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\ \vec{e}_x + \cos\theta\ \vec{e}_y \end{cases} \tag{12}$$

Podemos usar a Eq.(12) para ver como variam os versores $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_\theta$ em função do tempo.[4]

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \frac{d(\cos\theta)}{dt}\ \vec{e}_x + \frac{d(\sin\theta)}{dt}\ \vec{e}_y = -\sin\theta\ \dot{\theta}\ \vec{e}_x + \cos\theta\ \dot{\theta}\ \vec{e}_y \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\frac{d(\sin\theta)}{dt}\ \vec{e}_x + \frac{d(\cos\theta)}{dt}\ \vec{e}_y = -\cos\theta\ \dot{\theta}\ \vec{e}_x - \sin\theta\ \dot{\theta}\ \vec{e}_y \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\ \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\ \vec{e}_r \end{cases} \tag{13}$$

Da Eq.(13) concluimos que os versores do sistema de coordenadas polares variam devido à rotação (i.e. à variação do ângulo θ). Com este resultado podemos, por exemplo, escrever a aceleração em coordenadas polares (lembrando que $\vec{r} = r\ \vec{e}_r$):

[4] As derivadas na Eq.(13) podem ser efectuadas com recurso à regra do produto $(uv)' = u'v + uv'$ e à regra da cadeia $\frac{d(u(v))}{dt} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dt}$

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &\equiv \dot{\vec{r}} && (14)\\
&= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r \qquad \text{regra do produto} && (15)\\
&= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \qquad \text{usando a Eq.(13)} && (16)\\
& && (17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &\equiv \dot{\vec{v}} && (18)\\
&= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_\theta \qquad \text{regra do produto} && (19)\\
&= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r \qquad \text{usando a Eq.(13)} && (20)\\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta && (21)
\end{aligned}
$$

A expressão da aceleração em coordenadas polares é ligeiramente mais complicada que aquela que tinhamos encontrado para coordenadas cartesianas. No entanto, pela conveniência deste sistema de coordenadas no contexto específico da Gravitação, é a estas expressões que vamos recorrer grande parte das vezes.

Introduzidos estes conceitos fundamentais, estamos prontos para discutir as Leis de Newton que descrevem a dinâmica de um corpo em Mecânica Clássica. Vamos ver que todas as noções introduzidas aqui vão aparecer na formulação destas leis e tentar perceber melhor cada uma delas.

1.2 Leis de Newton

Entre as páginas dos *"Principia Mathematica"* está a primeira formulação rigorosa das leis da dinâmica que hoje conhecemos como as 3 Leis de Newton. Com estas 3 leis somos capazes de compreender, descrever e prever o movimento dos corpos. Para as formularmos precisamos apenas dos conceitos introduzidos na secção anterior e do conceito de Força.

Força: efeito sentido por um corpo como consequência de uma interacção, capaz de modificar o movimento de um corpo ou deformá-lo.

1.2.1 1ª Lei: Lei da Inércia

"Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare."

1ª Lei: Um corpo mantém o seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que seja forçado a mudá-lo por forças aplicadas sobre ele.

Matematicamente podemos escrever a primeira lei da seguinte forma:

$$\vec{F} = 0 \implies \vec{a} = 0 \iff \vec{v} \text{ constante} \tag{22}$$

A Lei da Inércia pode ser vista como uma lei empírica, um princípio físico. Podemos observar que, na ausência de forças, um corpo mantém o seu movimento uniforme ou de repouso. Por outras palavras, a única forma de alterar o estado de um corpo é actuando com uma força. É importante notar que esta "Força" é a *resultante de todas as forças aplicadas*. Mesmo que existam forças aplicadas num corpo, basta que a sua resultante (a soma vectorial de todas as forças) se cancele, para que o corpo mantenha o seu estado de repouso ou movimento uniforme.

A 1ªLei estabelece um referencial preferencial para as leis seguintes. Um referencial em que um corpo tem velocidade constante (um caso particular é o repouso, $\vec{v} = 0$) é chamado *Referencial Inercial*. As leis de Newton são válidas em diferentes referenciais desde que estes sejam inerciais.

1.2.2 2ª Lei: F = ma

"Lex II: Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur."

2ª Lei: A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida e é produzida na direcção na qual a força é aplicada.

Matematicamente, a 2ªLei toma a forma da equação mais famosa da Física[5]

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{23}$$

Contudo, uma representação mais fiel do enunciado da 2ªLei seria:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{24}$$

Embora a Eq.(23) e a Eq.(24) sejam matematicamente equivalentes, a Eq.(24) está mais próxima da intuição física que devemos ter da 2ªLei. O que

[5] Esta equação é válida nos casos em que a massa é constante, que será o nosso caso.

nos interessa é o movimento dos corpos, neste caso a forma como este muda por acção de uma força, pelo que a quantidade de interesse é a aceleração (variação da velocidade) de um corpo devida às forças que lhe são aplicadas. Tal como na 1ª Lei, $\vec{F}$ representa a resultante das forças, a soma vectorial de todas as forças aplicadas num corpo. Por conveniência, vamos usar a Eq.(24) na forma $m\vec{a} = \vec{F}$.

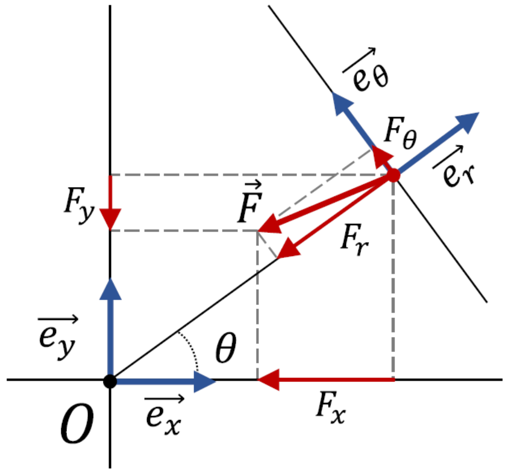

Figure 3: Decomposição de uma força em referenciais diferentes.

Por ser uma equação vectorial, a 2ªLei consiste na realidade em 3 equações, uma para cada direcção. Por outras palavras, forças aplicadas segundo $\vec{e}_x$ apenas fazem variar o movimento segundo $\vec{e}_x$ e forças aplicadas segundo $\vec{e}_y$ apenas fazem variar o movimento segundo $\vec{e}_y$. A duas dimensões:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}) = F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases} \tag{25}$$

A Eq.(25) evidencia o facto de podermos utilizar a 2ªLei em diferentes sistemas de coordenadas, tendo para isso de decompor as forças de acordo com o sistema de coordenadas escolhido (Figura 5).

1.2.3 3ª Lei: Par acção-reacção

"Lex III: Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sine corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi."

3ª Lei: Para cada acção há sempre uma reação igual e oposta: dois corpos actuam um sobre o outro de forma igual e em direções opostas.

A 3ª Lei de Newton põe em evidência que as forças estão associadas a interacções. Uma força existe devido à interacção de dois corpos e, portanto, ambos os corpos devem sentir a mesma força. Este princípio é conhecido como **Par Acção-Reacção**: para cada acção (força) existe uma reacção (outra força) de igual intensidade e direcção oposta. Estas forças têm sempre pontos de aplicação diferentes, uma vez que são aplicadas a corpos diferentes envolvidos na interacção.

Por exemplo, a força que o Sol exerce sobre a Terra é igual à força que a Terra exerce sobre o Sol. Porque não são, então, os efeitos iguais para a Terra e para o Sol? Pela 2ª Lei, Eq.(24), para a mesma força, a aceleração de um corpo será tanto maior quanto menor for a sua massa, e a massa da Terra é muito menor do que a massa do Sol.

As 3 Leis de Newton são os 3 pilares da dinâmica clássica. Com estas leis conseguimos descrever os mais variados movimentos e fazer previsões. Como veremos, estas leis serão suficientes para construir uma teoria da Gravitação capaz de prever os movimentos de planetas, cometas e satélites. Falta-nos apenas um ingrediente para introduzirmos a Lei da Gravitação Universal: as 3 leis de Kepler.

2 Leis de Kepler

Em 1609 e 1618, Johannes Kepler anunciou 3 Leis capazes de descrever o movimentos dos planetas no Sistema Solar. Kepler baseou-se nas observações astronómicas de Tycho Brahe para chegar à descrição matemática destes movimentos.

2.1 1ª Lei de Kepler

Um planeta em órbita em torno do Sol descreve uma elipse com o Sol num dos seus focos.

A 1ª Lei de Kepler determina que as órbitas descritas pelos planetas não são circulares, como se pensava, mas sim elípticas. Qual é a diferença entre uma circunferência e uma elipse? Uma circunferência é um caso particular de uma elipse.

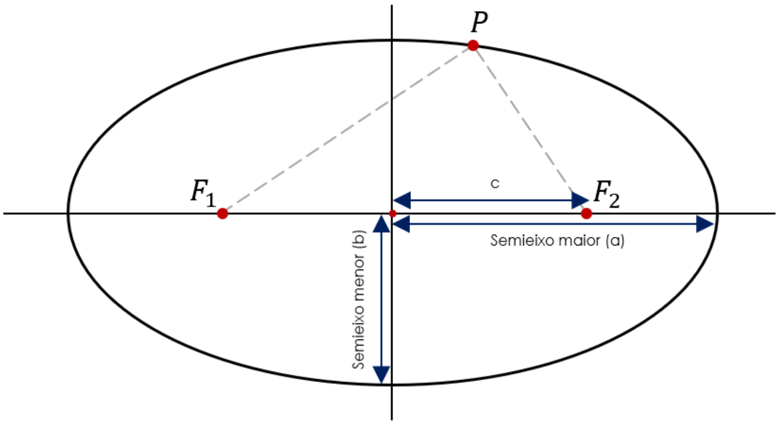

Figure 4: Uma Elipse é o lugar geométrico definido pela condição $|F_1P| + |PF_2| = 2a =$ constante.

Uma elipse é um lugar geométrico descrito pela seguinte equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \;\; B^2 < 4AC \tag{26}$$

A escolha do referencial é um passo importante na análise de um problema físico. Um referencial pode ser mais conveniente do que outro e tornar o problema extremamente mais simples. Neste caso, se os eixos da elipse estiverem alinhados com os eixos do referencial, a equação da elipse pode ser escrita de forma mais simples[6].

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1 \tag{27}$$

Na Eq.(27), o ponto (x_0, y_0) é o centro da elipse, a é o comprimento do semi-eixo horizontal (por norma, o maior) e b é o comprimento do semi-eixo vertical (por norma, o menor). Esta forma é particularmente conveniente para comparar a elipse com a circunferência. É fácil ver que uma circunferência é apenas uma elipse em que $a = b$, isto é, em que os semi-eixos são iguais. Se a origem do referencial coincidir com um dos focos da elipse, podemos escrever a equação da elipse em coordenadas polares da seguinte forma:

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}\equiv\frac{p}{1-e\cos\theta} \tag{28}$$

Ao parâmetro e dá-se o nome de *excentricidade* da elipse. A excentricidade é a relação entre a distância entre os focos e o eixo maior da elipse, $e = c/a$. É fácil ver que uma circunferência é o caso especial de uma elipse de excentricidade $e = 0$, i.e. $r = a$.

Entre os dados recolhidos por Tycho, encontrava-se o registo mais preciso da órbita de Marte. Kepler notou que uma elipse com o Sol num dos focos, Eq.(28) em que o Sol está na origem do referencial, descrevia muito melhor esta órbita do que uma circunferência. De facto, a órbita de Marte é elíptica e tem uma excentricidade $e \approx 0.093$.

Kepler concluiu que as órbitas planetárias seriam em geral elipses com excentricidades pequenas e não circulos como antes se pensava.

2.2 2ª Lei de Kepler

A linha que une o Sol e o planeta varre áreas iguais em períodos de tempo iguais.

A 2ª Lei de Kepler determina que a área varrida por unidade de tempo pela linha que une o Sol e o planeta é constante. Recorrendo à noção de

[6] As duas definições são equivalentes com $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2x_0b^2a$, $E = -2y_0a^2b$, $F = b^2x_0^2 - a^2b^2 + a^2y_0^2$. Ao alinhar os eixos da elipse com os eixos do referencial, conseguimos eliminar o termo cruzado Bxy.

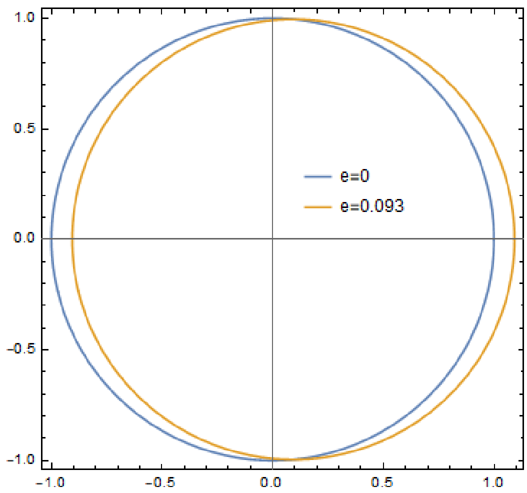

Figure 5: Comparação de uma órbita circular com uma órbita elíptica de excentricidade $e = 0.093$.

derivada, o que esta lei nos diz é o seguinte:

$$\frac{dA}{dt} = K \tag{29}$$

em que K é uma constante. Mas o que é dA/dt em geral? Podemos considerar um movimento infinitesimal e calcular a área varrida nesse movimento. Essa área será aproximadamente um triângulo de base $rd\theta$ e altura r, pelo que:

$$dA = \frac{1}{2}(rd\theta)r = \frac{1}{2}r^2 d\theta \tag{30}$$

Logo, concluimos que $K = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$, pelo que a 2ª Lei de Kepler também pode ser formulada da seguinte forma:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{constante} \tag{31}$$

Podemos expressar esta constante em função do período orbital. Durante um período, $\Delta\theta = 2\pi$ e $A = ab\pi$ (área de uma elipse). Logo:

$$\frac{dA}{dt}T = A \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}T = ab\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{ab\pi}{T} \tag{32}$$

De forma simplificada, a 2ª Lei diz-nos que $r^2\dot{\theta}$ =constante.

Planeta	d_{media} (UA)	Período (dias)	R^3/T^2 (10^{-6}UA^3/dia^2)
Mercúrio	0.389	87.77	7.64
Vénus	0.724	224.70	7.52
Terra	1	365.25	7.50
Marte	1.524	686.95	7.50
Júpiter	5.2	4332.62	7.49
Saturno	9.510	10759.2	7.43

Table 1: Dados utilizados por Kepler para formular a 3ª Lei.

2.3 3ª Lei de Kepler

O quadrado do período orbital de um planeta é directamente proporcional ao cubo do semieixo maior da sua órbita.

A 3ª Lei de Kepler relaciona o período orbital com a distância do planeta ao Sol, mais concretamente com o semieixo maior.

$$T^2 = ka^3 \tag{33}$$

em que k é a constante de proporcionalidade. Kepler usou a distância média ao Sol (que não diferia muito do semieixo maior uma vez que as excentricidades são pequenas) e o período orbital de 6 planetas para chegar a esta conclusão (Tabela 1).

3 Lei da Gravitação Universal

A Lei da Gravitação Universal foi a cereja no topo do bolo para os famosos *Principia*. Depois de estabelecer as 3 Leis fundamentais que regem a dinâmica, Isaac Newton foi capaz de encontrar a forma geral da força gravítica entre 2 corpos, que ficou conhecida como Lei da Gravitação Universal.

Lei da Gravitação Universal: Dois corpos, de massas m_1 e m_2, separados de uma distância r sentem uma força de atracção gravítica cuja magnitude é dada por:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{34}$$

em que a constante $G = 6.674 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^{-2}$ é a constante da Gravitação.

Como é que Newton chegou a esta expressão para a força gravítica?

3.1 Exemplo: Pêndulo gravítico

Antes de partirmos para o comportamento de planetas e estrelas, vamos focar-nos em corpos mais pequenos: por exemplo, a famosa maçã. À superfície da Terra foram feitas diversas experiências relacionadas com a queda dos corpos. Por um lado, sabia-se que a altura da qual um objecto era largado era proporcional ao quadrado do tempo que este demora a cair.

$$\Delta y = kt^2 \Longrightarrow y - y_0 = kt^2 \Longrightarrow y(t) = y_0 + kt^2 \tag{35}$$

$$\dot{y} = 2kt \Longrightarrow \ddot{y} = 2k \Longrightarrow m\ddot{y} = 2km = F_y \tag{36}$$

Logo, a força gravítica deve ser função da massa do corpo. Galileu Galilei mostrou, com a sua famosa experiência no topo da Torre de Pisa, que o tempo que um corpo demora a cair não depende da sua massa. Usando a forma obtida acima, concluímos que k não pode depender de m:

$$m\ddot{y} = F_y = 2km \Longrightarrow \ddot{y} = 2k \equiv g \tag{37}$$

onde g é a aceleração gravítica à superfície da Terra, igual para todos os corpos. Portanto, podemos usar $\vec{F}_g = m\vec{g}$, com $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, à superfície da Terra e realizar um conjunto de experiências com o objectivo de testar esta hipótese. Por exemplo, podíamos largar um corpo de várias alturas h e medir o tempo que demorava a chegar ao chão Δt. A equação que melhor se ajusta a este conjunto de pontos deverá ser da forma $h = k\Delta t^2 = \frac{1}{2}g\Delta t^2$. O declive da recta dá-nos o valor de g. O período de oscilação de um pêndulo também nos permite obter o valor de g. Este é um exemplo interessante, uma vez que diz respeito a uma força central, como é o caso da força gravítica.

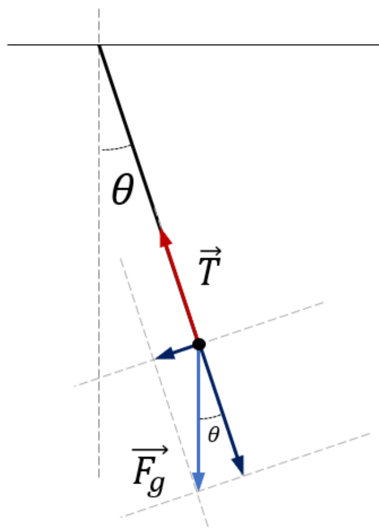

Figure 6: Pêndulo gravítico - Diagrama de Forças.

Consideremos o pêndulo da Figura 6. Dada a geometria do problema, vamos utilizar coordenadas polares. Para isso, temos de decompor as forças nas suas componentes radial e angular. Da Figura 6 concluímos que $F_r = F_g \cos\theta - T$ e $F_\theta = -F_g \sin\theta$. Vamos considerar o fio que suspende a massa inextensível, i.e. $r = L \Longrightarrow \dot{r} = 0 \Longrightarrow \ddot{r} = 0$.

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}) = F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m\ddot{r} = mr\dot{\theta} + F_g \cos\theta - T = mr\dot{\theta} + mg\cos\theta - T \\ mr\ddot{\theta} = -F_g \sin\theta = -mg\sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = m(g\cos\theta + L\dot{\theta}) \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

O termo $mr\dot{\theta}$ é visto como uma força fictícia, a famosa *Força Centrífuga* e garante que o somatório das forças se anula, de tal forma que $\ddot{r} = 0$. Na componente angular também aparece uma força fictícia, a *Força de Corliólis*, $2m\dot{r}\dot{\theta}$. Estas forças fictícias são consequência da nossa mudança de coordenadas: já não estamos num referencial inercial. A primeira equação diz-nos que a tensão exercída pelo fio depende da massa, da posição angular e da velocidade angular do pêndulo. A segunda equação é quase a equação de um oscilador harmónico, falhando apenas pela presença do $\sin\theta$ em vez de θ. No entanto, para ângulos pequenos podemos usar a aproximação $\sin\theta \approx \theta$:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \tag{38}$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ é a frequência de oscilação do pêndulo. Uma vez que $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, podemos determinar o valor de g medindo o período de oscilação do pêndulo.

$$g \approx 9.8\ m/s^2 \tag{39}$$

3.2 Lei da Gravitação Universal

Vamos seguir a mesma estratégia da secção anterior. Partindo das 3 Leis de Newton e das 3 Leis de Kepler (resultados obtidos da observação directa do movimento de planetas), vamos tentar derivar a Lei da Gravitação Universal, Eq.(34).

Vamos olhar com mais atenção para a 2ª Lei de Kepler.

$$\begin{aligned} r^2\dot{\theta} &= \text{constante} \\ \Leftrightarrow \quad r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Da primeira para a segunda linha derivámos ambos os lados em ordem ao tempo. A terceira linha corresponde exactamente à componente angular da aceleração que encontrámos quando mudámos para coordenadas polares, Eq.(25). Isto implica que a resultante das forças na direcção angular é nula. Por outras palavras, a força é radial (ou central) e aponta para o centro do referencial (no caso das elipses de Kepler, para o Sol). Vamos definir a quantidade $L = mr^2\dot{\theta}$, que pelo argumento acima é uma constante do movimento.

A 1ª Lei de Kepler diz-nos que as órbitas planetárias são elipses. Em coordenadas polares, a elipse é definida pela Eq.(28). Escrito de outra forma:

$$\begin{aligned} \frac{p}{r} &= 1 - e\cos\theta \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{p}{r^2}\dot{r} &= e\sin\theta\ \dot{\theta} \\ \Leftrightarrow \quad p\dot{r} &= -e\sin\theta(r^2\dot{\theta}) \\ \Leftrightarrow \quad p\dot{r} &= -e\sin\theta\frac{L}{m} \qquad \text{usando a relação } L = mr^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

Da primeira para a segunda linha derivámos ambos os lados da equação em ordem ao tempo. Podemos voltar a derivar para obter a aceleração radial $\ddot{r}$.

$$\begin{array}{rrcl} & p\dot{r} & = & -e\sin\theta\frac{L}{m} \\ \Leftrightarrow & p\ddot{r} & = & -e\cos\theta\ \dot{\theta}\frac{L}{m} \\ \Leftrightarrow & p\ddot{r} & = & -e\cos\theta\left(\frac{L}{mr^2}\right)\frac{L}{m} \quad \text{usando a relação } L = mr^2\dot{\theta} \\ \Leftrightarrow & p\ddot{r} & = & -\frac{L^2}{m^2r^2}e\cos\theta \end{array}$$

Se recordarmos a expressão para a aceleração radial

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{r} = a_r + \frac{L^2}{m^2r^3} \tag{40}$$

podemos substituir $\ddot{r}$ na equação acima

$$\begin{array}{rrcl} & p\ddot{r} & = & -\frac{L^2}{m^2r^2}e\cos\theta \\ \Leftrightarrow & p\left(a_r + \frac{L^2}{m^2r^3}\right) & = & -\frac{L^2}{m^2r^2}e\cos\theta \\ \Leftrightarrow & pa_r & = & -\frac{L^2}{m^2r^2}\left(-e\cos\theta - \frac{p}{r}\right) \\ \Leftrightarrow & pa_r & = & \frac{L^2}{m^2r^2}(-e\cos\theta - 1 + e\cos\theta) \\ \Leftrightarrow & pa_r & = & -\frac{L^2}{m^2r^2} \\ \Leftrightarrow & a_r & = & -\frac{1}{p}\frac{L^2}{m^2r^2} \\ \Leftrightarrow & a_r & = & -\frac{\alpha}{r^2} \end{array}$$

Se as órbitas dos planetas seguem a 1ª Lei de Kepler, então a força radial que lhes é aplicada deve ser $F_r = ma_r = -m\frac{\alpha}{r^2}$, sendo m a massa do planeta.

Se usarmos novamente a mesma equação, podemos obter uma expressão para a constante p:

$$\begin{array}{rrcl} & p\ddot{r} & = & \frac{L^2}{m^2r^2}e\cos\theta \\ \Leftrightarrow & p\ddot{r} & = & \frac{L^2}{m^2r^2}\left(\frac{p}{r} - 1\right) \\ \Leftrightarrow & \ddot{r} & = & \frac{L^2}{m^2r^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \\ \Leftrightarrow & \ddot{r} & = & r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \\ \Leftrightarrow & \ddot{r} & = & r\dot{\theta}^2 - \frac{r^2\dot{\theta}^2}{p} \end{array}$$

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -m\frac{\alpha}{r^2} \\ \Leftrightarrow \quad r\dot{\theta}^2 - \frac{r^2\dot{\theta}^2}{p} - r\dot{\theta}^2 &= -\frac{\alpha}{r^2} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{r^2\dot{\theta}^2}{p} &= \frac{\alpha}{r^2} \\ \Leftrightarrow \quad p &= \frac{r^4\dot{\theta}^2}{\alpha} \\ \Leftrightarrow \quad p &= \frac{L^2}{\alpha m^2} \end{aligned}$$

Portanto, podemos reescrever a equação da elipse:

$$r = \frac{L^2}{\alpha m^2}\frac{1}{1 - e\cos\theta} \tag{41}$$

Em $\theta = 0$, a Eq.(28) diz-nos que $r = a(1+e)$. Por outro lado:

$$r(\theta = 0) = \frac{L^2}{\alpha m^2}\frac{1}{1-e} \implies a(1+e) = \frac{L^2}{\alpha m^2}\frac{1}{1-e} \implies \frac{L^2}{m^2} = a(1-e^2)\alpha \tag{42}$$

Mas da Eq.(32) temos:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2m} &= \frac{ab\pi}{T} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{L^2}{4m^2} &= \frac{a^2b^2\pi^2}{T^2} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{a(1-e^2)\alpha}{4} &= \frac{a^2b^2\pi^2}{T^2} \\ \Leftrightarrow \quad T^2a(1-e^2)\alpha &= (2\pi)^2a^2b^2 \\ \Leftrightarrow \quad T^2a^2(1-e^2)\alpha &= (2\pi)^2a^3b^2 \\ \Leftrightarrow \quad T^2b^2\alpha &= (2\pi)^2a^3b^2 \\ \Leftrightarrow \quad T^2 &= \frac{(2\pi)^2}{\alpha}a^3 \end{aligned}$$

onde usámos a relação $b^2 = a^2(1-e^2)$ para uma elipse[7]. Se recordarmos a 3ª Lei de Kepler, $T^2 = ka^3$, em que k é uma constante, concluímos que α não pode depender do planeta, em partícular não pode depender da sua massa. A força gravítica sentida pelo planeta é:

$$\vec{F}_g = -\alpha\frac{m}{r^2}\,\vec{e}_r \tag{43}$$

[7]Para uma elipse, $a^2(1-e^2) = a^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 = b^2$, que é fácil de ver se pusermos o ponto P da Figura 4 no eixo vertical - a obtemos um triângulo rectângulo de hipotenusa a e catetos b e c.

em que α é uma constante. Finalmente, pela 3ª Lei de Newton, todas as forças vêm aos pares. Na interacção entre o Sol e um planeta, se o planeta sente uma força F_r, o Sol deve sentir uma força igual mas de sentido oposto, $-F_r$. Por argumentos de simetria, o Sol não deve ser especial. Se a força é proporcional à massa do planeta, também deve ser proporcional à massa do Sol. Assim, chegamos à expressão obtida por Newton para a força gravítica entre dois corpos, a Lei da Gravitação Universal:

$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r \tag{44}$$

em que G é a constante de proporcionalidade, conhecida como *Constante da Gravitação Universal*. O valor de $G = 6.674 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$ determina-se experimentalmente, por exemplo através da experiência de Cavendish.

Para terminar, podemos usar $\alpha = GM$ para reescrever a 3ª Lei de Kepler para órbitas elípticas.

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM}a^3 \tag{45}$$

3.3 Orbitas circulares

Agora que temos uma expressão para a força gravítica podemos pensar em órbitas. Para começar e por simplicidade, vamos considerar órbitas circulares. Imaginemos um satélite de massa m numa órbita circular de raio R em torno da Terra. Como a órbita é circular temos $r = R =$ constante, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$.

$$\begin{aligned}
& m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &=& \ 0 \\
\Leftrightarrow \quad & mR\ddot{\theta} &=& \ 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \ddot{\theta} &=& \ 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \dot{\theta} &=& \ \omega = \mathit{constante}
\end{aligned}$$

Logo, a velocidade angular do satéllite é constante. O satélite demora um período, T, a dar uma volta completa, 2π. Logo, $\omega T = 2\pi$ ou $T = 2\pi/\omega$. A velocidade linear (tangente à órbita) do satélite é dada por $v = \omega R$.

$$\begin{array}{rrcl} & m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) & = & -G\frac{Mm}{R^2} \\ \Leftrightarrow & -mR\omega^2 & = & -G\frac{Mm}{R^2} \\ \Leftrightarrow & R\left(\frac{v}{R}\right)^2 & = & \frac{GM}{R^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{v^2}{R} & = & \frac{GM}{R^2} \\ \Leftrightarrow & v & = & \sqrt{\frac{GM}{R}} \end{array}$$

Portanto, concluímos que a velocidade orbital de um planeta em órbita circular é dada por:

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \tag{46}$$

Podiamos ter usado a mesma equação, mas com o período:

$$\begin{array}{rrcl} & m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) & = & -G\frac{Mm}{R^2} \\ \Leftrightarrow & -mR\omega^2 & = & -G\frac{Mm}{R^2} \\ \Leftrightarrow & R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 & = & \frac{GM}{R^2} \\ \Leftrightarrow & R^3 & = & \frac{GM}{R_T^2}R_T^2\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \\ \Leftrightarrow & R & = & g^{1/3}\left(\frac{T}{2\pi}R_T\right)^{2/3} \end{array}$$

A razão pela qual escrevemos o raio orbital desta forma "pouco natural" é simples. Usando a experiência do pêndulo, podemos determinar $g = 9.8\ m/s^2$. Há muito tempo que se sabe determinar o raio da Terra (medindo sombras em 2 pontos de latitudes diferentes), $R = 6.371 \times 10^6\ m$, e é fácil medir o período orbital de um satélite. Por exemplo, no caso da Lua, $T \approx 27.3$ dias, pelo que o raio da órbita da Lua deve ser $R_{Lua} \approx 383\,977$ km (i.e. a uma distância $d = 376\,606$ km da Terra). Se em vez disso quisermos saber onde colocar um satélite artificial em órbita de tal forma que este seja geostacionário, ou seja, de forma a que o período da órbita do satélite coincida com o período de rotação da Terra (situação em que o satélite se encontra sempre acima do mesmo ponto terreste), temos $T = 1$ dia. Concluimos que $R_{geo} \approx 42\,241$ km (ou a uma altura $h \approx 35\,870$ km da superfície da Terra).

Para terminar esta análise, note-se que a equação que estamos a usar é a mesma que nos dá a 3ª Lei de Kepler (para órbitas circulares), Eq.(33).

$$
\begin{array}{rrcl}
 & m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) & = & -G\frac{Mm}{R^2} \\
\Leftrightarrow & -mR\omega^2 & = & -G\frac{Mm}{R^2} \\
\Leftrightarrow & R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 & = & \frac{GM}{R^2} \\
\Leftrightarrow & \frac{R^3}{T^2} & = & \frac{GM}{(2\pi)^2}
\end{array}
$$

A constante de proporcionalidade é a mesma encontrada por Kepler nos dados da Tabela 1, pelo que $GM/(2\pi)^2 \approx 7.5 \times 10^{-6}\ UA^3/dia^2$. Depois de obtermos $G = 6.674 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$, por exemplo através da experiência de Cavendish, podemos calcular a massa do Sol, $M \approx 2.0 \times 10^{30}\ kg$.

Podemos fazer exactamente o mesmo com a Lua e com a Terra, de forma a calcular a massa da Terra. Neste caso, a constante de proporcionalidade tem de ser calculada com o período orbital da Lua, $T \approx 27.3$ dias, e com o raio da sua órbita que calculámos acima, $R_{Lua} \approx 383\ 977$ km.

$$\frac{R_{Lua}^3}{T^2} = \frac{GM_T}{(2\pi)^2} \approx 7.6\ (km)^3/dia^2$$

de onde se obtém $M_T \approx 6.0 \times 10^{24}$ kg.

4 Energia Mecânica

Já estamos em posição de colocar algumas questões relativamente ao movimento de corpos sob a acção de forças gravíticas. A Lei da Gravitação Universal dá-nos a expressão geral para a força de atracção entre 2 corpos massivos.

Contudo, há situações em que é mais vantajoso falar em termos de energia. Um corpo pode ter energia por razões diferentes. A energia que um corpo possui por se estar a mover é chamada **Energia cinética**. Esta é a forma mais evidente de energia, uma vez que nos é intuitivo associar energia ao movimento de um corpo, mas não é a única. Se um corpo tem o *potencial* para se mover, i.e. se existe a possibilidade de utilizar energia armazenada para mover um corpo, diz-se que o corpo tem **Energia potencial**. O exemplo mais simples deste tipo de energia é a energia potencial gravítica: se levantarmos um corpo a uma dada altura do chão, basta-nos largá-lo para que ele se mova. A energia utilizada pelo corpo para cair deve-se à presença da força gravítica, que o puxa para baixo, razão pela qual chamamos a este tipo de energia *potencial gravítica*.

A energia potencial está, portanto, sempre associada a uma força. Esta força pode ser gravítica (energia potencial gravítica), mas também pode ser elástica (energia potencial elástica), por exemplo uma mola esticada prestes a ser largada, ou química (energia potencial química), ao nível molecular.

Quando pensamos em energia e movimento, devemos automaticamente lembrar-nos de um conceito importante: o trabalho, W. O trabalho é uma forma de transferência de energia por acção de uma força e através do movimento. Se não houver força ou se não houver movimento, não há trabalho. Uma forma simplificada de expressar o trabalho é a seguinte:

$$W = F d \cos\alpha \tag{47}$$

Vamos tentar reescrever esta expressão de outra forma. Em primeiro lugar, o trabalho W não passa de *energia transferida*. Se estivermos a pensar na energia armazenada devido à presença de uma força, então a energia que está a ser tranferida é a potencial, E_p. Na prática, o trabalho realizado pela força será a energia potencial, ΔE_p, que é transformada em energia cinética. Por outro lado, a distância d percorrida não é mais que a variação da posição do corpo, Δr. O $\cos\alpha$ só nos está a dizer que apenas a componente da força na direcção do deslocamento é importante, mas se pensarmos (correctamente) na forças, $\vec{F}$, e no deslocamento, $\Delta\vec{r}$, como vectores, então isto corresponde ao produto interno, $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$.

$$\Delta E_p = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta E_p}{\Delta\vec{r}} = \vec{F} \tag{48}$$

Este quociente, no limite $\Delta\vec{r}\to 0$, não passa da nossa definição de derivada (neste caso em ordem à posição, $\vec{r}$). Sendo uma equação vectorial, a direcção é importante: só há força na direcção associada à variação de energia potencial.

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{d\vec{r}} \tag{49}$$

O que é que isto nos diz no caso da força gravítica?

$$\vec{F}_g = -\frac{dE_p}{d\vec{r}} = -G\frac{Mm}{r^2} = -\frac{d}{dr}\left(-G\frac{Mm}{r}\right) \quad \Longrightarrow \quad E_p = -G\frac{Mm}{r} \tag{50}$$

Esta é a expressão da energia potencial gravítica, com $r = 0$ no centro do planeta. Se pensarmos na Terra e na Física do dia-a-dia, faz-nos mais sentido pensar na superfície como origem do referencial e pensar numa altura h relativamente à superfície. Podemos escrever $r = R + h$, em que R é o raio da Terra e portanto $h << R$.

$$\begin{aligned}
& \Delta E_p &=& \; E_p(R+h) - E_p(R) \\
\Leftrightarrow\; & \Delta E_p &=& \; -G\tfrac{Mm}{R+h} + G\tfrac{Mm}{R} \\
\Leftrightarrow\; & \Delta E_p &=& \; -G\tfrac{Mm}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)} + G\tfrac{Mm}{R} \\
\Leftrightarrow\; & \Delta E_p &=& \; -G\tfrac{Mm}{R}\left(1-\tfrac{h}{R}\right) + G\tfrac{Mm}{R} \\
\Leftrightarrow\; & \Delta E_p &=& \; m\left(\tfrac{GM}{R^2}\right)h \equiv mgh
\end{aligned}$$

Da terceira para a quarta linha usámos a aproximação $(1+x)^{-1} \approx (1-x)$ quando $x << 1$. É importante notar que, por estarmos sempre a falar de variações de energia, é preciso escolher uma referência. O que fizemos foi passar a referência do centro da Terra, em $r = 0$, para a superfície, em $r = R$. A energia potencial depende, portanto, da altura h a que um corpo se encontra:

$$E_p = mgh \qquad g \equiv \frac{GM}{R^2} \tag{51}$$

em que M é a massa da Terra (ou do planeta em questão) e R o seu raio (ou do planeta em questão). Note-se que esta expressão só é válida para $h << R$, i.e. perto da superfície (não podemos usá-la para falar da Lua, por exemplo). Se agora usarmos a relação entre força e energia potencial, encontramos uma expressão aproximada para a força gravítica à superfície da Terra (agora h faz o papel de r, i.e. $\vec{r} = h\vec{e}_y$):

$$\vec{F} = -mg\,\vec{e}_y \tag{52}$$

Esta é precisamente a forma que encontrámos anteriormente para a força gravítica à superfície da Terra. Para a Terra, com $M = 5.972 \times 10^{24}$ kg e $R = 6.371 \times 10^6$ m, encontramos $g = 9.82\ m/s^2$. No caso da Lua, por exemplo, com $M = 7.349 \times 10^{22}$ kg e $R = 1.737 \times 10^6$ m, $g = 1.63 m/s^2$, o que explica os movimentos dos astronautas na Lua.

E em relação à energia cinética? Vamos olhar para a mesma equação com outros olhos:

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{d\vec{r}} \tag{49}$$

Para simplificar vamos ignorar os vectores e tratar a equação a uma dimensão, $\vec{r} \to x$. Pela 2ª Lei de Newton, $F = m\ddot{x}$. Por outro lado, se usarmos a energia potencial para mover o corpo, essa energia transforma-se em energia cinética, i.e. $\Delta E_p = -\Delta E_c$ (o sinal significa que a energia potencial *perdida* resulta em energia cinética *ganha*).

$$\begin{array}{rrcl} & m\ddot{x} & = & \frac{dE_c}{dx} \\ \Leftrightarrow & m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) & = & \frac{dE_c}{dt}\frac{dt}{dx} \\ \Leftrightarrow & m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt} & = & \frac{dE_c}{dt} \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) & = & \frac{dE_c}{dt} \end{array}$$

Uma vez que as derivadas em ordem ao tempo são iguais, à parte de um termo constante no tempo (que podemos ignorar porque bastava-nos redefinir a referência, como discutimos no caso da energia potencial), temos:

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{53}$$

Esta é a famosa expressão para a energia cinética, a energia de um corpo de massa m a mover-se a uma velocidade v. Agora já estamos em posição de falar da energia total de um corpo associada ao seu estado (de repouso ou movimento)[8]. A esta energia total damos o nome de **Energia Mecânica**.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \tag{54}$$

Na Eq.(54) especificámos para o caso em que a única energia potencial é gravítica. Como sabemos, a energia mecânica de um sistema é conservada sempre que as únicas forças aplicadas são forças conservativas (isto é o mesmo que dizer que não existem forças dissipativas, forças que não obedecem à Eq.(49)). A força gravítica, como vimos, é uma força conservativa. Portanto, a energia mecânica de um corpo que apenas se encontra sobre a acção da força gravítica não varia, $\Delta E_m = 0$:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{r_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{Mm}{r_i} \tag{55}$$

Esta equação vai permitir-nos deduzir algumas quantidades interessantes. Por exemplo, podemos determinar a *velocidade de escape*, a velocidade mínima que um corpo tem de ter para escapar à força gravítica de um planeta. Primeiro, é importante perceber o que *"escapar à força gravítica de um planeta"* significa. Se a acção da força gravítica em termos de energia é dada pela energia potencial, o corpo só escapa quando $E_p = 0$, que corresponde precisamente a $r \to \infty$ como seria de esperar. Por outro lado, o corpo pode atingir o *infinito* com uma quantidade arbitrária de energia cinética, com uma velocidade arbitrária. O caso que requer menos energia é obviamente o caso em que a energia cinética final também se anula.

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

A velocidade de escape depende da massa e do raio do planeta. Para a Terra, por exemplo, em que $M = 5.972 \times 10^{24}$ kg e $R = 6.371 \times 10^6$ m, a velocidade de escape é aproximadamente $v_e = 11\ 186$ m/s = 40 269 km/h.

Antes de falarmos de órbitas em geral, vale a pena registar um resultado interessante. Já tinhamos calculado a velocidade orbital de um corpo em órbita circular, Eq.(46). Se substituirmos na Eq.(54) para a energia mecânica:

[8] Estamos a excluir a energia de que o corpo precisa simplesmente para existir. Como nos ensinou Albert Einstein, qualquer corpo possui pelo menos a energia $E = mc^2$, mas esta será a mesma o tempo todo e, como estamos apenas interessados em variações de energia, não será relevante para nós.

$$\begin{aligned} & E &=& \tfrac{1}{2}mv^2 - G\tfrac{Mm}{r} \\ \Leftrightarrow\; & E &=& \tfrac{1}{2}m\tfrac{GM}{R} - G\tfrac{Mm}{R} \\ \Leftrightarrow\; & E &=& -\tfrac{GMm}{2R} \end{aligned}$$

A energia mecânica numa órbita circular calcula-se facilmente através do raio da órbita.

$$E = -\frac{GMm}{2R} \tag{56}$$

4.1 Órbitas

Vamos usar o que introduzimos sobre energia para estudar órbitas. De forma geral, vamos considerar uma órbita elíptica de semieixo maior a e excentricidade e (como vimos, podemos voltar a uma órbita circular fazendo $e = 0$, tendo $R = a$).

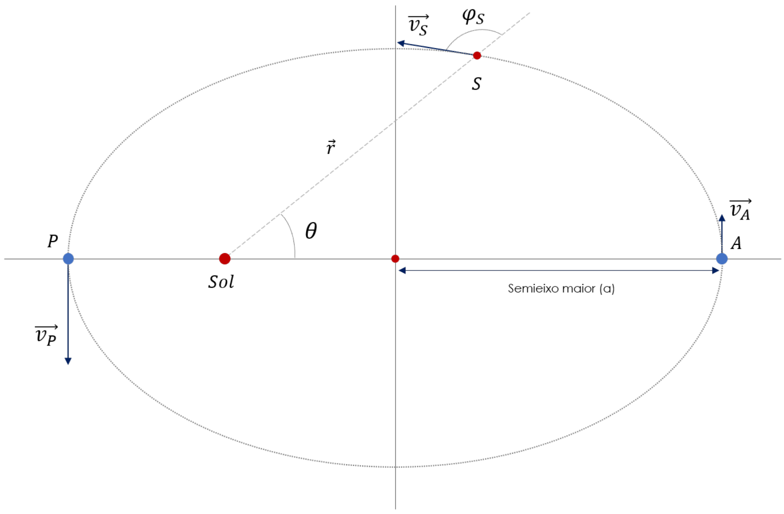

Figure 7: Órbita elíptica de semieixo maior a e excentricidade e, com o Sol num dos focos. Encontram-se marcados o *periélio*, P, o *afélio*, A, e um ponto genérico da órbita, S.

Uma órbita elíptica possui dois pontos especiais: o ponto em que o corpo se encontra mais próximo do Sol chama-se **Periélio** e o ponto em que o corpo se encontra mais afastado do Sol chama-se **Afélio**.

Em primeiro lugar, é fácil ver que a velocidade de escape tem a mesma forma numa órbita elíptica.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}mv_i^2 - G\tfrac{Mm}{r_i} &= \tfrac{1}{2}mv_f^2 - G\tfrac{Mm}{r_f} \\
\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}mv_e^2 - G\tfrac{Mm}{r} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad v &= \sqrt{\tfrac{2GM}{r}}
\end{aligned}$$

Agora a velocidade de escape depende do ponto da órbita em que o corpo se encontra. Uma vez que quanto maior for o raio, menor é a velocidade de escape, o afélio é o melhor ponto da órbita para tentar escapar, i.e. quando $r = a(1+e)$.

Há outra característica muito útil do periélio e do afélio. São os únicos pontos da trajectória em que $v = r\dot{\theta}$, i.e. os únicos pontos em que a velocidade não tem componente radial. Efectivamente, são os dois pontos da trajectória em que a velocidade faz um ângulo de 90º com o raio. Nestes pontos, existe uma relação interessante entre a energia e a quantidade conservada $L = mr^2\dot{\theta}$ que encontrámos anteriormente:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} \tag{57}$$

$$L^2 = 2mr^2\left(E + G\frac{Mm}{r}\right) \tag{58}$$

Mas se L é uma quantidade conservada, é igual em todos os pontos da trajectória, o que significa que $L_{afélio} = L_{periélio}$, ambos pontos em que a relação acima se verifica.

$$\begin{aligned}
L_{afélio} &= L_{periélio} \\
\Leftrightarrow \quad 2mr_A^2\left(E + G\tfrac{Mm}{r_A}\right) &= 2mr_P^2\left(E + G\tfrac{Mm}{r_P}\right) \\
\Leftrightarrow \quad r_A^2E + GMmr_A &= r_P^2E + GMmr_P \\
\Leftrightarrow \quad E &= -GMm\tfrac{r_A - r_P}{r_A^2 - r_P^2} \\
\Leftrightarrow \quad E &= -GMm\tfrac{r_A - r_P}{(r_A - r_P)(r_A + r_P)} \\
\Leftrightarrow \quad E &= -\tfrac{GMm}{r_A + r_P} \\
\Leftrightarrow \quad E &= -\tfrac{GMm}{2a}
\end{aligned}$$

Logo, a energia mecânica de um corpo numa órbita elíptica é determinada pelo semieixo maior da elipse.

$$E_{total} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \tag{59}$$

Daqui podemos tirar uma expressão para a velocidade do corpo em órbita elíptica em função do raio:

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}(1-2e\cos\theta)} \tag{60}$$

Verificamos efectivamente que a velocidade orbital é tanto maior quanto menor for a distância do corpo à origem.